OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ 7.03.2025

CLASA a VII-a

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră numărul

$$a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{9}{20} + \ldots + \frac{25}{100} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{20}\right).$$

a) Arătaţi că numărul a este pătrat perfect.

b) Aflați numărul întreg n, știind că $\frac{a}{2n-1} \in \mathbb{Z}$.

Problema 2. (7 puncte)

a) Se consideră numerele $x = 169$ și $y = 289$. Arătaţi că $\frac{\sqrt{x \cdot y}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$.

b) Arătați că, pentru orice număr natural n, $\frac{\sqrt{x \cdot y} + 2025^{2n+1} + (-2025)^{2n+1}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$,

oricare ar fi numerele reale pozitive x și y.

Problema 3. (7 puncte)

Trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB < CD, \quad AC \cap BD = \{O\})$ are diagonalele perpendiculare. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA.

a) Arătați că $MP = \frac{AB+CD}{2}$.

b) Arătați că $NQ < \frac{AD+BC}{2}$.

Problema 4. (7 puncte)

Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB > BC$. Pe latura CD se consideră punctul E, astfel încât $CE = 2DE = 2AD$. Dacă $AC \cap BE = \{F\}$, calculați măsura unghiului AFE.

Subiectele au fost - propuse de prof. Ioan Balica - Inspectoratul Școlar Județean Cluj
prof. Paula Balica - Şcoala Gimnazială Ion Agârbiceanu Cluj-Napoca
- traduse de prof. Edit Szasz, Colegiul Tehnic Turda

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 2 ore.

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Succes!