OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VIII-a 7.03.2025

Problema 1. (7 puncte)

a) Fie $a = \sqrt{2^4} + \sqrt{\frac{5}{0{,}0(2)}} + \sqrt{\frac{55}{0{,}0(02)}} + \sqrt{\frac{555}{0{,}0(002)}}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției "$\sqrt{a}$ este număr natural".

b) Arătați că $\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025}}} < 2025$

Soluție:

a) $a = 2^2 + \sqrt{\frac{5}{\frac{2}{90}}} + \sqrt{\frac{55}{\frac{2}{990}}} + \sqrt{\frac{555}{\frac{2}{9990}}}$ .... **(1p)**

$a = 4 + \sqrt{5 \cdot 45} + \sqrt{55 \cdot 495} + \sqrt{555 \cdot 4995}$.. .... **(1p)**

$a = 1849$ .... **(1p)**

$\sqrt{a} = 43$ este număr natural => propoziția este adevărată........ **(1p)**

b) $\sqrt{2024 \cdot 2025} = \sqrt{(2025-1)2025} = \sqrt{2025^2 - 2025} < \sqrt{2025^2} = 2025$........ **(1p)**

$\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025}}} < \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025}}$

$= \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2025(2024+1)}}$........ **(1p)**

$= \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025} = \sqrt{2025^2} = 2025$........ **(1p)**

Problema 2. (7 puncte)

a) Determinați media aritmetică a numerelor reale a, b, c știind că $(3x+1)^3 - 12x - 4 = (3x+a)(3x+b)(3x+c)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $E(x) = \left[\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)+16} - \frac{1}{25-(5-x)(5+x)}\right] : 2 \cdot \frac{x^4}{x+1}$ unde $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$.

Rezolvați ecuația $E(x) = -1012$.

Soluție:

a) $(3x+1)^3 - 12x - 4 = (3x+1)^3 - 4(3x+1) =$........ **(1p)**

$= (3x+1)(3x-1)(3x+3)$........ **(1p)**

Media aritmetică = 1........ **(1p)**

b) $E(x) = \left[\frac{1}{x^4-16+16} - \frac{1}{25-(25-x^2)}\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{x+1}$........ **(1p)**

$E(x) = \frac{1-x^2}{x^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{x+1}$........ **(1p)**

$E(x) = \frac{1-x}{2}$........ **(1p)**

Soluția ecuației este $x = 2025$........ **(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$. Muchia laterală are lungimea de $8\sqrt{6}\ cm$ și face cu planul bazei un unghi cu măsura de 60^0.

a) Arătați că suma lungimilor muchiilor este mai mică decât $84\sqrt{2}\ cm$

b) Dacă VD este apotema feței (VBC) determinați tangenta unghiului plan al unghiului diedru format de planele (VAD) și (VAB).

Soluție:

a) $l = 12\sqrt{2}\ cm$.. **(1p)**

suma lungimilor muchiilor $= 24\sqrt{6} + 36\sqrt{2} < 84\sqrt{2} <=> \sqrt{3} < 2\ (A)$ .... **(1p)**

b) $BD \perp (VAD)$.. **(1p)**

$DE \perp VA;\ DE, VA \subset (VAD) \overset{T3\perp}{\Longrightarrow} BE \perp VA$.. **(1p)**

$\sphericalangle[(VAD),(VAB)] = \sphericalangle(DE, BE) = \sphericalangle(DEB)$.. **(1p)**

$VO = 12\sqrt{2}\ cm$ (înălțimea piramidei), $DE = 9\sqrt{2}\ cm$.. **(1p)**

$tg(\sphericalangle(DEB) = \frac{BD}{ED} = \frac{2}{3}$ .... **(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie $ABCDA'B'C'D'$ cub și $M \in DC$ astfel încât $3DM = DC$ și $AM = 3\sqrt{10}\ cm$. Perpendiculara în M pe AM intersectează BC în N.

a) Determinați lungimea diagonalei cubului.

b) Arătați că $CD' \parallel (BDE)$, unde E este centrul feței $AA'D'D$.

c) Fie $P \in CC'$ astfel încât $PC = 2\ cm$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele AC și NP.

Soluție:

a) $l = 9\ cm$.. **(1p)**

diagonala cub $= 9\sqrt{3}\ cm$.. **(1p)**

b) $AC \cap BD = \{O\}. EO$ linie mijlocie în $\Delta ACD'$...................................... **(1p)**

$CD' \parallel (BDE)$.. **(1p)**

c) $\Delta ADM \sim \Delta MCN => CN = 2\ cm$.. **(1p)**

$\frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{9} \overset{R.T.Th.}{\Longrightarrow} \left.\begin{matrix} NP \parallel BC' \\ AC \parallel A'C' \end{matrix}\right\} =>$.. **(1p)**

$\sphericalangle(AC, NP) = \sphericalangle(A'C', BC') = \sphericalangle(A'C'B) = 60^0$.. **(1p)**