OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VI-a 7.03.2025

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră numărul $A = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2025}\right)^n \cdot \frac{2026^n}{2^n}, n \in N^*$.

a) Arătați că A este număr natural.

b) Pentru n cel mai mic număr natural prim de două cifre distincte aflați numărul divizorilor naturali ai lui A.

Soluție:

a) $A = \left(\frac{1}{\frac{1\cdot 2}{2}} + \frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{2025\cdot 2026}{2}}\right)^n \cdot \frac{2026^n}{2^n} =$ .... **(2p)**

$A = (2)^n \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2026}\right)^n \cdot \frac{2026^n}{2^n} = (2)^n \cdot \left(\frac{2025}{2026}\right)^n \cdot \frac{2026^n}{2^n} = 2025^n$ .... **(2p)**

b) $A = 2025^{13} = (3^4 \cdot 5^2)^{13} = 3^{52} \cdot 5^{26}$, ... **(2p)**

deci nr div nat ai lui A este $53 \cdot 27 = 1431$.. **(1p)**

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră mulțimea $B = \{x \in Z | x = a^2 + b^2, a, b \in Z\}$.

a) Arătați că $170 \in B$.

b) Arătați că $71 \notin B$.

c) Verificați dacă $2025 \in B$.

Soluție:

a) $170 = 13^2 + 1^2, 13 \in Z, 1 \in Z, 170 \in B$ (**orice altă variantă corectă se punctează**) ....**(2p)**

b) Presupunem că $71 \in B$, atunci există $a, b \in Z$ astfel încât $a^2 + b^2 = 71$................. **(1p)**

Unul dintre a și b este par

a^2	0	4	16	36	64	1	9	25	49
b^2	71	67	55	35	7	70	62	46	22

Observăm că $b \notin Z$, contradicție. Atunci $71 \notin B$... **(2p)**

c) $2025 = 36^2 + 27^2, 36 \in Z, 27 \in Z, 2025 \in B$ (**orice altă variantă corectă se punctează**)....**(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Numerele a, b, c reprezintă măsurile în grade a trei unghiuri adiacente în această ordine. Știind că a și b sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,(3), b și c sunt direct proporționale cu 0,25 și 0,(3), iar c reprezintă 40% din suplementul lui a, aflați măsura unghiului determinat de bisectoarele unghiurilor a și b.

Soluție:

$a \cdot \frac{1}{2} = b \cdot \frac{1}{3}, 4 \cdot b = 3 \cdot c$ ....**(2p)**
$a = \frac{2b}{3}, c = \frac{4b}{3}$ ....**(2p)**
$a = 30°, b = 45°, c = 60°$ ....**(2p)**
$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 15° + 22°30' = 37°30'$ ....**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie segmentul AB și E mijlocul său. Se consideră $AD \perp AB, BC \perp AB, D$ și C de o parte și de alta a dreptei AB astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCE$. Demonstrați că:

a) $DE \equiv CE$.
b) D, E, C sunt coliniare.
c) $BD \equiv AC$.

Soluție:DESEN CORECT..**(1p)**

a) $\Delta DAE \equiv \Delta CBE (L.U.U.) (AE \equiv EB, \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCE, \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CBE)$, deci $DE \equiv CE$ ....**(2p)**
b) $\Delta DAE \equiv \Delta CBE \Rightarrow \sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle CEB$, (opuse la vârf), atunci D, E, C sunt coliniare.............**(2p)**
c) $\Delta DAE \equiv \Delta CBE \Rightarrow DA \equiv CB$
$\Delta DAB \equiv \Delta CBA (L.U.L.): AD \equiv BC, AB \equiv AB, \sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA \Rightarrow BD \equiv AC$ ....**(2p)**