OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a V-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

a) Determinați ultima cifră a numărului

$$A = 10^{11} + 11^{12} + 12^{13} + 13^{14} + 14^{15} + 15^{16} + 16^{17} + 17^{18} + 18^{19} + 19^{20}$$

b) Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că $2 \cdot c = 19 : a - 7 \cdot b$

Soluție:

a) $U(A) = U(0 + 1 + 2 + 9 + 4 + 5 + 6 + 9 + 2 + 1) = 9$ .... **(4p)**

b) $2 \cdot c + 7 \cdot b = 19 : a \Rightarrow a = 1$ .... **(2p)**

$2 \cdot c + 7 \cdot b = 19 \Rightarrow b = 1, c = 6$, $\overline{abc} = 116$ .... **(1p)**

Problema 2. (7 puncte)

Aflați restul împărțirii numărului

$$x = 7 + 97 + 997 + 9997 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{de\ 2024\ ori}7 + 2024 \quad \text{la } 3.$$

Soluție:

$x = (3 \cdot 2 + 1) + (3 \cdot 32 + 1) + (3 \cdot 332 + 1) + \ldots + \left(3 \cdot \underbrace{333\ldots33}_{de\ 2024\ ori}2 + 1\right) + 2024$ .... **(3p)**

$$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \ldots + \underbrace{333\ldots33}_{de\ 2024\ ori}2\right) + 2025 + 2024$$

$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \ldots + \underbrace{333\ldots33}_{de\ 2024\ ori}2\right) + 4049$ .... **(2p)**

$x = 3 \cdot \left(2 + 32 + 332 + \ldots + \underbrace{333\ldots33}_{de\ 2024\ ori}2\right) + 3 \cdot 1349 + 2,$ $\quad R=2$ .... **(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Moş Cizmă le propune celor patru nepoţi un joc matematic de echipă. Le dă fiecăruia un bilet cu numere în funcţie de n, număr natural prim. Sandală are pe bilet $2n + 1$, Pantof are pe bilet $3n + 2$, Adidas are $4n + 3$, iar Nike are pe bilet $6n + 1$.

Moş Cizmă îi provoacă să determine numerele naturale n, pentru care cele patru numere sunt prime în acelaşi timp. Puteţi să-i ajutaţi? Dacă da, care sunt numerele n?

Soluţie:

Pentru $n = 2$ observăm că Pantof obţine 8, care nu este prim.. **(1p)**

Pentru $n = 3$ observăm că Adidas obţine 15, care nu este prim .... **(1p)**

Pentru $n = 5$ observăm că:

Sandală obţine 11, Pantof obţine 17, Adidas obţine 23, Nike obţine 31, care toate sunt prime .... **(2p)**

Pentru $n \geq 5$, putem avea următoarele forme pentru n: $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$

Dacă $n = 5k$, nu avem numere prime pentru orice $k \geq 2$.. **(1p)**

Dacă $n = 5k + 1$ Pantof nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 2$ Sandală nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 3$ Adidas nu are nr. prim, dacă $n = 5k + 4$ Nike nu are nr. prim. .... **(2p)**

Atunci singura soluţie este $n = 5$

Problema 4. (7 puncte)

Au fost distribuite bilete construite după următoarea regulă matematică:

Bilet 1		Bilet 2		Bilet 3		Bilet 4		Bilet 5	
1	4	8	7	15	10	22	13	29	16

Miţi afirmă că are biletul 27 şi pe el are numărul 83. Piţi afirmă că are biletul 35 şi suma numerelor de pe bilet este 340. Riţi afirmă că are biletul 45 şi că suma tuturor numerelor de pe biletele 1,2 ,3,4,5,....,45 este 10125. Câştigă jocul cea care spune adevărul. Aflaţi cine a câştigat.

Soluţie:

183	82	Bilet 27 , Miţi nu spune adevărul .... **(2p)**
239	106	Bilet 35 , Piţi nu spune adevărul .... **(2p)**
309	136	Bilet 45 , ... **(1p)**

S=1+8+15+....+309+4+7+10+...+136=6975+3150=10125, Riţi spune adevărul......... **(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VI-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră mulțimile A și B, finite și nedisjuncte. Dacă cardinalul mulțimii $A \cap B$ reprezintă 25% din cardinalul mulțimii A și 20% din cardinalul mulțimii B, să se determine cât la sută reprezintă cardinalul mulțimii $A \setminus B$ din cardinalul mulțimii $B \setminus A$.

Soluție:

Fie card A = a și card B = b. Avem atunci:

$\mathrm{card}(A \cap B) = 25\%\ a = 20\%\ b \Rightarrow \frac{25}{100}a = \frac{20}{100}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ ....(1p)

$\mathrm{card}(A \setminus B) = \mathrm{card}\ A \setminus \mathrm{card}(A \cap B) = a - 25\%\ a = 75\%\ a = \frac{3}{4}a$ ....(2p)

$\mathrm{card}(B \setminus A) = \mathrm{card}\ B \setminus \mathrm{card}(A \cap B) = b - 20\%\ b = 80\%\ b = \frac{4}{5}b$ ....(2p)

$\mathrm{card}(A \setminus B) = x\% \cdot \mathrm{card}(B \setminus A) \Rightarrow \frac{3}{4}a = \frac{x}{100} \cdot \frac{4}{5}b \Rightarrow x = 100 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow x = 75 \Rightarrow x\% = 75\%$..........(2p)

Problema 2. (7 puncte)

Numerele naturale nenule a, b, c, d sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3a}, \frac{1}{4b}, \frac{1}{5c}$, iar

$2a + \frac{2b}{3a} + \frac{c}{2b} + \frac{4d}{5c} = 24$.

a) Să se determine numerele a, b, c, d.

b) Stabiliți dacă, adunând, câte două, câte trei, sau câte patru numerele a, b, c, d se poate obține un număr natural pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3a} = \frac{c}{4b} = \frac{d}{5c} = k, k \neq 0$ ....(1p)

$a = 2k;\ \frac{b}{3a} = k \Rightarrow \frac{2b}{3a} = 2k;\ \frac{c}{4b} = k \Rightarrow \frac{2c}{4b} = \frac{c}{2b} = 2k;\ \frac{d}{5c} = k \Rightarrow \frac{4d}{5c} = 4k$...(2p)

$4k + 2k + 2k + 4k = 24 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a = 4, b = 24, c = 192, d = 1920$ ....(2p)

b) Se obțin următoarele sume: 28, 196, 1924, 216, 1944, 2112, 220, 1948, 2116, 2136, 2140.

$a + c = 196 = 14^2$ și $a + c + d = 2116 = 46^2$ sunt pătrate perfecte ....(2p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Determinați numerele întregi x pentru care fracția $\frac{x^2+4}{x+2}$ este număr întreg.

Soluție:

$\left.\begin{matrix} x+2|x^2+4 \\ x+2|x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2|x^2+4 \\ x+2|x^2+2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2|2x-4$ ....**(3p)**

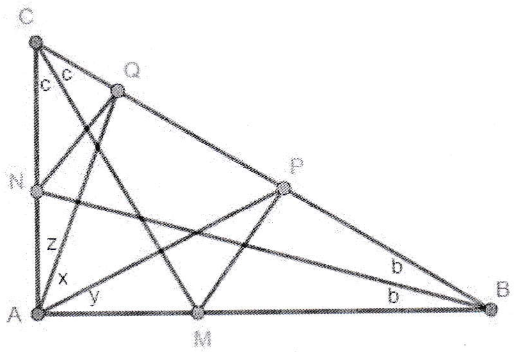
$\left.\begin{matrix} x+2|2x-4 \\ x+2|x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2|2x-4 \\ x+2|2x+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2|8$ ....**(3p)**

$x+2 \in D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\} \Rightarrow x \in \{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\}$ ....**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele N, respectiv M. Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC. Aflați măsura unghiului PAQ.

Soluție:



Desen corect ....**(1p)**

CM bisect $\Rightarrow$ *MA=MP* $\Rightarrow$ ΔMAP *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle MAP = \sphericalangle MPA = y$

$\sphericalangle AMP$ *ext* $\Delta MBP \Rightarrow \sphericalangle AMP = 2b + 90°$ ....**(2p)**

BN bisect $\Rightarrow$ *NA=NQ* $\Rightarrow$ ΔNAQ *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle NAQ = \sphericalangle NQA = z$

$\sphericalangle ANQ$ *ext* $\Delta NCQ \Rightarrow \sphericalangle ANQ = 2c + 90°$ ....**(2p)**

$y = \frac{180° - \sphericalangle AMP}{2} = \frac{180° - 90° - 2b}{2} = 45° - b$; $z = \frac{180° - \sphericalangle ANQ}{2} = \frac{180° - 90° - 2c}{2} = 45° - c$ ....**(1p)**

Atunci $x = 90° - y - z = b + c = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 45°$..**(1p)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Arătați că, dacă $\sqrt{\overline{34xy}}$ este număr natural, atunci și $\sqrt{\overline{xy}}$ este număr natural, unde x și y sunt cifre nenule din sistemul zecimal.

Soluție:

$3400 < \overline{34xy} \leq 3499 \Rightarrow \sqrt{3400} < \sqrt{\overline{34xy}} \leq \sqrt{3499}$ .... **(2p)**

$58{,}30\ldots < \sqrt{\overline{34xy}} \leq 59{,}15\ldots$ .... **(1p)**

$\sqrt{\overline{34xy}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{\overline{34xy}} = 59 \Rightarrow \overline{34xy} = 59^2 = 3481$ .... **(2p)**

$\overline{xy} = 81 \Longrightarrow \sqrt{\overline{xy}} = 9 \in \mathbb{N}$ .... **(2p)**

Problema 2. (7 puncte)

a) Dați un exemplu de două numere naturale nenule x și y, care verifică relația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

b) Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Soluție:

a) Un exemplu dintre următoarele:

$x = 5, y = 20$, sau $x = 6, y = 12$, sau $x = y = 8$, sau $x = 12, y = 6$, sau $x = 20, y = 5$ .... **(1p)**

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{y} = \frac{y-4}{4y}$ .... **(1p)**

$x = \frac{4y}{y-4} \Longrightarrow x = \frac{4y-16+16}{y-4} \Longrightarrow x = 4 + \frac{16}{y-4}$ .... **(2p)**

$x \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow \frac{16}{y-4} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y - 4 \in D_{16} \Longrightarrow y - 4 \in \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$ .... **(1p)**

$y \in \{-12, -4, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 20\}$ .... **(1p)**

$(x, y) \in \{(3, -12), (2, -4)(-4, 2), (-12, 3), (20, 5), (12, 6), (8, 8), (6, 12), (5, 20)\}$ .... **(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC, AD < BC, \sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, iar M este mijlocul laturii AB. Fie $CM \cap AD = \{N\}$. Se dă $DM \perp AC$.

a) Demonstrați că patrulaterul $ACBN$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $BD \perp MC$.

Soluție:

Desen corect...**(1p)**

a) $\Delta NAM \equiv \Delta CBM(C.U) \Rightarrow NA \equiv BC$ ....**(1p)**

$NA \equiv BC, NA \parallel BC \Rightarrow NACB$ este paralelogram...**(1p)**

b) $NACB$ este paralelogram $\Rightarrow NB \parallel AC$...**(1p)**

$DM \perp AC \Rightarrow DM \perp NB$ ....**(1p)**

În ΔDBN :

BA, DM sunt înălțimi, $BA \cap DM = \{M\} \Rightarrow M$ este ortocentrul $\Delta DBN \Rightarrow NM \perp BD \Rightarrow MC \perp BD$.......**(2p)**

Problema 4. (7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele M și N pe latura BC, astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAN$.

a) Arătați că $AC^2 = BC \cdot CN$.

b) Arătați că triunghiul AMN este isoscel.

Soluție:

Desen corect...**(1p)**

a)

$\sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle ACB, \sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABC \Rightarrow \Delta ACN \sim \Delta BCA\ (U.U.)$ ....**(1p)**

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow .AC^2 = BC \cdot CN$..**(1p)**

b) Fie $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}, \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MBA \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBA\ (L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACB$ ....**(1p)**

$\sphericalangle AMN$ este unghi exterior $\Delta AMB \Rightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle BAM + \sphericalangle ABM$ ....**(1p)**

$\sphericalangle ANM$ este unghi exterior $\Delta ANC \Rightarrow \sphericalangle ANM = \sphericalangle ACN + \sphericalangle NAC$..**(1p)**

Dar $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACN, \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM \Rightarrow \Delta AMN$ este isoscel.....................**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VIII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

a) Arătați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, pentru orice a, b, numere reale nenule, pozitive.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>6$.

Soluție:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b>0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ ....(2p)

$a^2-2ab+b^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad (a-b)^2\geq 0, \forall a,b>0$ ....(1p)

b)

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b>0, \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow a=b$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}>2$ .... (1p)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>2$ .... (1p)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>2$ .... (1p)

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>6$ .... (1p)

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră expresia : $E(x)=\left(\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{5-x}-\frac{2x}{x^2+4x-5}:\frac{x^2+x}{1-x^2}+\frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};\ -1;0;\ 1;\ 5\right\}$

a) Arătați că $E(x)=-\frac{3}{x-1}$.

b) Arătați ca suma soluțiilor întregi ale inecuației $\left|\frac{3}{E(x)}\right|\leq 5$ este număr natural par.

Soluție:

a) $E=\left(\frac{x-6}{(x-5)(x+5)}-\frac{x}{x-5}+\frac{2}{x+5}+\frac{(x-2)(x+1)}{(x+5)(x+1)}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$ .... (1p)

$E(x)=\left(\frac{-9x-6}{x^2-25}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$ .... (1p)

$E(x)=\left(\frac{-3(3x+2)}{x^2-25}\right)\cdot\frac{x^2-25}{(3x+2)(x-1)}$ .... (1p)

$E(x)=-\frac{3}{x-1}$ unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};-1;0;\ 1;\ 5\right\}$ .... (1p)

b) $\left|\frac{3}{E(x)}\right|\leq 5 \ \Leftrightarrow |-x+1|\leq 5$ ....(1p)

$-4\leq x\leq 6\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};\ -1;0;\ 1;\ 5\right\}$ .... (1p)

$S=6$ număr natural par..(1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm, punctele E, F, G, H aparţin laturilor AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $AE = BF = CG = DH = \frac{3}{4} \cdot AB$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $AQ = 4{,}8\ cm$.

a) Arătaţi că $EFGH$ este pătrat.
b) Arătaţi că $AF \perp GB$.
c) Determinaţi distanţa de la punctul Q la dreapta BG.

Soluție:

a) $\Delta AHE \equiv \Delta BEF \equiv \Delta CFG \equiv \Delta DGH \Rightarrow HE = EF = GF = HG \Longrightarrow EFGH$ este romb................................(1p)

$\sphericalangle AHE + \sphericalangle AEH = 90^0, \sphericalangle AHE \equiv \sphericalangle FEB \Longrightarrow HEF = 90^0 \Longrightarrow EFGH$ este pătrat................................ (1p)

b) $\Delta ABF \equiv \Delta BCG \Longrightarrow \sphericalangle FAB = \sphericalangle GBC, \sphericalangle FAB + \sphericalangle AFB = 90^0 \Longrightarrow \sphericalangle FTB = 90^0$ .... (1p)

$\{T\} = AF \cap BG \Longrightarrow AF \perp GB$................................ (1p)

c) Aplicăm teorema celor trei perpendiculare $\Longrightarrow QT \perp GB \Longrightarrow d(Q, GB) = QT$................................(2p)
Aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic $\Delta ABF \Longrightarrow AT = 6{,}4\ cm$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta QAT \Longrightarrow QT = 8\ cm$ .... (1p)

Problema 4. (7 puncte)

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălţimea egală cu $8\sqrt{3}\ cm$ şi aria triunghiului ΔOAB egală cu $16\sqrt{3}\ cm^2$, unde $\{O\} = BA' \cap AB'$.

a) Arătaţi că latura bazei este egală 8 cm.
b) Arătaţi că $OE \parallel$ (ABC), unde E este mijlocul lui CC'.
c) Determinaţi măsura unghiului format de planele (BA'E) și (ABC).

Soluție:

a) $A_{ABB'A'} = 4 \cdot 16\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\ cm^2$................................ (1p)

$AB = 8\ cm$ ....(1p)

b) Fie $\{F\} = A'E \cap AC$

$$\left.\begin{array}{r} EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Longrightarrow CE \text{ linie mijlocie} \Longrightarrow E \text{ mijlocul segmentului } A'F \\ O \text{ mijlocul segmentului } A'B \end{array}\right\} \Longrightarrow OE \parallel BF$$ .... (1p)

$$\left.\begin{array}{r} OE \parallel BF \\ BF \subset (ABC) \end{array}\right\} \Longrightarrow OE \parallel (ABC)$$ .... (1p)

c) $(A'BE) \cap (ABC) = BF, EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Longrightarrow CA = CF = BC \Longrightarrow \Delta ABF\ dreptunghic$ în B..............(1p)

$$\left.\begin{array}{r} (A'BE) \cap (ABC) = BF \\ A'B \perp BF,\ A'B \subset (A'BE) \\ AB \perp BF,\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sphericalangle((A'BE), (ABC)) \Longrightarrow \sphericalangle(ABA')$$ ....(1p)

$\Delta ABA'$ dreptunghic în $A \Longrightarrow \sphericalangle(ABA') = 60°$................................(1p)

Metoda 2 pentru punctele a şi b

Sau a) $A_{\Delta AOB} = \frac{OM \cdot AB}{2}, OM \perp AB$ ....(1p)

$AB = \frac{2 \cdot 16\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 8\ cm$................................(1p)

b) $OM \parallel EC, OM = EC => OMCE$ paralelogram ....(1p)
$OE \parallel MC, MC \subset (ABC) => OE \parallel (ABC)$ ....(1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine"
Anton Pann

Felicitări!